

## 2.9.24 Logaritmické nerovnice I

**Předpoklady:** 2908, 2917, 2919

**Pedagogická poznámka:** Pokud mají studenti pracovat samostatně, budou potřebovat na všechny příklady minimálně jednu a půl vyučovací hodiny. Pokud není čas, doporučuji vynechat příklady 5 a 7. Jde o jednu z hodin, kde studenti nemohou být úspěšní, pokud se nedrží v obraze ohledně řešení nerovnic.

**Pedagogická poznámka:** V hodině je možné postupovat dvěma způsoby. Můžete vynechat úvodní poznámku o očekávaných problémech a pustit studenty do nerovnic. Velká většina z nich pak udělá v obou příkladech chyby. Druhou možností je, popovídat si o poznámce a pak teprve zadat příklady. Chybujících bude podstatně méně, ale zmizí efekt překvapení.

**Pedagogická poznámka:** V průběhu hodiny, hlavně při řešení problémů v lavicích, je třeba neustále kontrolovat, zda studenti chápou, že se neučí nic nového, ale pouze opakuji postupy z minula. Na začátku hodiny připomínám, že velká část úspěchu je právě v orientaci uvnitř příkladu, a proto není k ničemu se případně učit příklady nazpaměť.

Na co budeme muset dávat při řešení logaritmických nerovnic pozor:

- dodržování podmínek (do logaritmu nemůže na rozdíl od exponenciálních funkcí dosazovat cokoliv),
- přechod při odlogaritmovávání (logaritmická funkce může být stejně jako funkce exponenciální rostoucí i klesající).

**Př. 1:** Vyřeš nerovnici  $\log_2(x+1) < 2$ .

**Podmínka:**  $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$  (do logaritmu nemůžeme dosadit cokoliv).

$$\log_2(x+1) < 2$$

$$\log_2(x+1) < \log_2 2^2$$

$\log_2(x+1) < \log_2 4$  - nerovnost logaritmu, základ větší než 1  $\Rightarrow$  můžeme odlogaritmovat.

$$(x+1) < 4$$

$$x < 3$$

Zdá se, že platí  $K = (-\infty; 3)$ , ale musíme zohlednit podmínky pro dosazování do logaritmu (všechna dosazovaná čísla musí být větší než  $-1$ ).

$$K = (-1; 3)$$

**Pedagogická poznámka:** Pokud studenti potřebují na vyhodnocování podmínek číselnou osu, rozhodně jim v tom nebráním, naopak sám ji občas nabízím.

**Př. 2:** Vyřeš nerovnici  $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < -1$ .

**Podmínka:**  $2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$  (do logaritmu nemůžeme dosadit cokoliv).

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}} 2 \quad - \text{nerovnost logaritmů, základ menší než } 1 \Rightarrow \text{funkce } y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

je klesající a menší hodnoty  $y$  vyrábí z větších hodnot  $x \Rightarrow$  můžeme odlogaritmovat, ale musíme obrátit nerovnost (stejná situace jako u exponenciálních nerovnic).

$$2x-1 > 2$$

$$2x > 3$$

$$x > \frac{3}{2}$$

$$K = \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$$

**Pedagogická poznámka:** Pokud vynecháte úvod hodiny, naprostá většina studentů zkazí oba první příklady. V prvním zapomenou zohlednit, že logaritmus je možné určovat pouze z kladných čísel a v druhém nezohlední, že základ logaritmu je menší než 1. Myslím, že v tomto okamžiku je dobré místo připomenout, jak jsou v takových situacích užitečná obecná pravidla („výsledek obsahuje pouze to, co můžeme dosadit“, „nerovnice se nemění při úpravách reprezentovaných rostoucí funkcí). Pokud úvod prodiskutujete, bude chyb méně, více pak u druhého příkladu (během řešení prvního mnozí zapomenou, že si mají na něco dávat pozor).

**Při řešení logaritmických nerovnic musíme dávat pozor na:**

- **dodržení podmínek pro dosazení do logaritmu,**
- **hodnotu základu, pokud je základ logaritmu menší než 1, musíme při odlogaritmování obrátit znaménko nerovnosti.**

**Př. 3:** Vyřeš nerovnici  $\log_3(x+2) < \log_3(3-x)$ .

**Podmínky:**  $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$ ,  $3-x > 0 \Rightarrow 3 > x$ .

$\log_3(x+2) < \log_3(3-x)$  - nerovnost logaritmů, základ větší než 1  $\Rightarrow$  můžeme odlogaritmovat a nemusíme otáčet nerovnost.

$$x+2 < 3-x$$

$$2x < 1$$

$$x < \frac{1}{2}, \text{ musíme splnit podmínky } x > -2, x < 3 \Rightarrow K = \left(-2; \frac{1}{2}\right).$$

**Př. 4:** Vyřeš nerovnici  $\log_{0,5} x + \log_{0,5}(x+3) \geq 2\log_{0,5} 2$ .

**Podmínky:**  $x > 0$ ,  $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$ .

Mezi logaritmy je sčítání, uvnitř jsou různé výrazy  $\Rightarrow$  převedeme na tvar

$$\log_{0,5} \text{výraz1} \geq \log_{0,5} \text{výraz2}$$

$$\log_{0,5} x + \log_{0,5} (x+3) \geq 2 \log_{0,5} 2$$

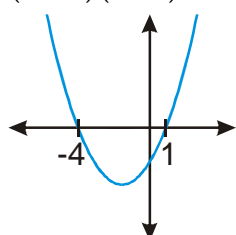
$$\log_{0,5} x(x+3) \geq \log_{0,5} 2^2$$

$\log_{0,5} x^2 + 3x \geq \log_{0,5} 4$  - nerovnost logaritmů, základ menší než 1  $\Rightarrow$  obracíme nerovnost.

$$x^2 + 3x \leq 4$$

$$x^2 + 3x - 4 \leq 0$$

$$(x+4)(x-1) \leq 0 \quad \Rightarrow \text{nulové body, grafem je „d'olík“}$$



Zdá se, že řešením je interval  $\langle -4; 1 \rangle$ , musíme splnit podmínky  $x > 0$ ,  $x > -3$

$$\Rightarrow K = (0; 1)$$

**Př. 5:** Vyřeš nerovnici  $\log|x-3| < 2$ .

**Podmínky:**  $|x-3| > 0 \Rightarrow x \neq 3$ .

$$\log|x-3| < 2$$

$\log|x-3| < \log 10^2$  - nerovnost logaritmů, základ větší než 1  $\Rightarrow$  zachováváme nerovnost

$|x-3| < 100$  - hledáme čísla, vzdálená od 3 o méně než 100  $\Rightarrow$  interval  $(-97; 103)$

Musíme splnit podmínku  $x \neq 3 \Rightarrow K = (-97; 3) \cup (3; 103)$ .

**Pedagogická poznámka:** Někteří studenti si úlohy komplikují tím, že ještě před odstraňováním logaritmu odstraní absolutní hodnotu. Upozorněte je, že jsou tak v rozporu se zásadou KISS, protože odstranění absolutní hodnoty znamená dvojitý postup ve chvíli, kdy ještě není odstraněn logaritmus a nerovnice je sama o sobě dostatečně složitá.

**Př. 6:** Vyřeš nerovnici  $\log_x 9 < 4$ .

**Podmínky:**  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

Příklad je možné řešit dvěma způsoby.

**a) pomocí definice logaritmu**

$\log_x 9$  - číslo, na které musíme umocnit  $x$ , aby vyšlo 9  $\Rightarrow$  přepíšeme pravou stranu rovnice na logaritmus při základu  $x$ :

$\log_x 9 < \log_x x^4$  chceme odlogaritmovat, ale postup při odlogaritmování závisí na hodnotě základu (zda je větší nebo menší než 1), oba druhy hodnot jsou povoleny  $\Rightarrow$  nemůžeme příklad vyřešit najednou, musíme rozdělit do dvou větví.

$$\log_x 9 < \log_x x^4, \quad 0 < x < 1$$

$$\log_x 9 < \log_x x^4, \quad x > 1$$

(základ logaritmu je menší než 1  $\Rightarrow$  obracíme znaménko nerovnosti)

$9 > x^4 \quad / \sqrt[4]{\quad} \quad (x > 0 \text{ kvůli podmínce v logaritmu})$

$$\sqrt[4]{9} > x$$

$$x < \sqrt{3}$$

Zdá se, že řešením je interval  $(-\infty; \sqrt{3})$ ,

počítáme s čísly  $x < 1$  a  $x > 0 \Rightarrow K_1 = (0; 1)$ .

(základ logaritmu je větší než 1  $\Rightarrow$  neobracíme znaménko nerovnosti)

$9 < x^4 \quad / \sqrt[4]{\quad} \quad (x > 0 \text{ kvůli podmínce v logaritmu})$

$$\sqrt[4]{9} < x$$

$$x > \sqrt{3}$$

Zdá se, že řešením je interval  $(\sqrt{3}; \infty)$ ,

počítáme s čísly  $x > 1$ , taková jsou v intervalu  $(\sqrt{3}; \infty)$  všechna  $\Rightarrow K_2 = (\sqrt{3}; \infty)$ .

$$K = K_1 \cup K_2 = (0; 1) \cup (\sqrt{3}; \infty)$$

### b) pomocí vzorce na změnu základu

Nahradíme  $\log_x 9$  podílem logaritmů:  $\log_x 9 = \frac{\log_9 9}{\log_9 x} = \frac{1}{\log_9 x}$ .

$$\log_x 9 < 4$$

$\frac{1}{\log_9 x} < 4$  potřebujeme vynásobit nerovnici číslem  $\log_9 x$ , které může být kladné i

záporné  $\Rightarrow$  nemůžeme příklad vyřešit najednou, musíme rozdělit výpočet do dvou větví.

$$\log_9 x < 0 \Rightarrow x < 1$$

$$\frac{1}{\log_9 x} < 4 \quad / \cdot \log_9 x \text{ (násobíme záporným}$$

číslem  $\Rightarrow$  obracíme nerovnost)

$$1 > 4 \log_9 x$$

$$\frac{1}{4} > \log_9 x$$

$\log_9 9^{\frac{1}{4}} > \log_9 x$  - odlogaritmuje, základ je větší než 1  $\Rightarrow$  zachováváme nerovnost.

$$\sqrt[4]{9} > x$$

$$x < \sqrt{3}$$

Zdá se, že řešením je interval  $(-\infty; \sqrt{3})$ ,

počítáme s čísly  $x < 1$  a  $x > 0 \Rightarrow K_1 = (0; 1)$ .

$$\log_9 x > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$\frac{1}{\log_9 x} < 4 \quad / \cdot \log_9 x \text{ (násobíme kladným číslem}$$

$\Rightarrow$  zachováváme nerovnost)

$$1 < 4 \log_9 x$$

$$\frac{1}{4} < \log_9 x$$

$\log_9 9^{\frac{1}{4}} < \log_9 x$  - odlogaritmuje, základ je větší než 1  $\Rightarrow$  zachováváme nerovnost.

$$\sqrt[4]{9} < x$$

$$x > \sqrt{3}$$

Zdá se, že řešením je interval  $(\sqrt{3}; \infty)$ ,

počítáme s čísly  $x > 1$ , taková jsou v intervalu  $(\sqrt{3}; \infty)$  všechna  $\Rightarrow K_2 = (\sqrt{3}; \infty)$ .

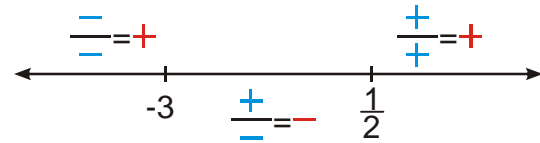
$$K = K_1 \cup K_2 = (0; 1) \cup (\sqrt{3}; \infty)$$

**Pedagogická poznámka:** Studenti takřka výhradně řeší předchozí nerovnici pomocí definice logaritmu. Přesto jim ukazují i druhý postup, aby viděli, že i naprosto jinou cestou se dostaneme ke stejnému výsledku a dělení na intervaly, které se objeví při odlogaritmování kvůli různým hodnotám základů, se ukáže i při jiném postupu na jiném místě z jiných důvodů, ale s naprosto stejnými důsledky.

**Př. 7:** Vyřeš nerovnici  $\log_{0,5} \frac{x+3}{2x-1} \leq 0$ .

**Podmínky:**  $\frac{x+3}{2x-1} > 0 \Rightarrow$  řešíme nerovnici v podílovém tvaru.

Nulové body:  $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ ,  $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ .



$$x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$$

Převědeme nerovnici na tvar  $\log_{0,5} \text{výraz1} \geq \log_{0,5} \text{výraz2}$ .

$$\log_{0,5} \frac{x+3}{2x-1} \leq 0$$

$\log_{0,5} \frac{x+3}{2x-1} \leq \log_{0,5} 1$  - odlogaritmuje, základ je menší než 1  $\Rightarrow$  obracíme nerovnost.

$\frac{x+3}{2x-1} \geq 1$  potřebujeme nerovnost vynásobit výrazem  $(2x-1)$ , který může být kladný i záporný  $\Rightarrow$  musíme rozdělit výpočet.

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow$  násobíme záporným číslem  $\Rightarrow$

obracíme nerovnost.

$$x+3 \leq 2x-1$$

$$4 \leq x$$

Zdá se, že řešením je interval  $\langle 4; \infty \rangle$ , počítáme

s čísly  $x < \frac{1}{2} \Rightarrow K_1 = \emptyset$ .

$x > \frac{1}{2} \Rightarrow$  násobíme kladným číslem  $\Rightarrow$

nerovnost zachováváme.

$$x+3 \geq 2x-1$$

$$4 \geq x$$

Zdá se, že řešením je interval  $(-\infty; 4]$ , počítáme

s čísly  $x > \frac{1}{2} \Rightarrow K_2 = \left(\frac{1}{2}; 4\right]$ .

$$K = K_1 \cup K_2 = \left(\frac{1}{2}; 4\right]$$

**Př. 8:** Petáková:

strana 38/cvičení 29 b) d) f)

strana 38/cvičení 30 c) e)

strana 38/cvičení 31 c)

strana 38/cvičení 34 a)

strana 38/cvičení 37 d) g)

**Shrnutí:** Při řešení logaritmických nerovnic musíme kromě hodnoty základu dávat pozor i na definiční obory výrazů, ze kterých logaritmus počítáme.